

Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Comunidad Valenciana 2021,
Convocatoria extraordinaria

mentoor.es



Problema 1. Álgebra

Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2x - y + z = m \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + mz = m \end{cases}$$
 donde m es un parámetro real, se pide:

- La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m .
- La solución del sistema cuando $m=1$.
- Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

Solución:

- La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m .

Para discutir el sistema, aplicaré el Teorema de Rouché-Frobenius. Analizo el determinante de la matriz de coeficientes, A .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & m \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2(m + 12) - (-1)(m - 15) + 1(-4 - 5) = 2m + 24 + m - 15 - 9 = 3m$$

El determinante se anula si $3m = 0 \implies m = 0$. Este es nuestro valor crítico.

Caso 1: $m \neq 0$.

$|A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3$. El rango de la ampliada A^* también será 3.

Como $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 3 = n^{\circ}$ de incógnitas, el sistema es **Compatible Determinado (S.C.D.)**.

Caso 2: $m = 0$.

$|A| = 0 \implies \text{Rg}(A) < 3$. Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, $\text{Rg}(A) = 2$.

El sistema es homogéneo (todos los términos independientes son cero), por lo que siempre es compatible.

Como $\text{Rg}(A) = 2 < 3$, el sistema es **Compatible Indeterminado (S.C.I.)**.

Si $m \neq 0$, el sistema es S.C.D. Si $m = 0$, es S.C.I.

- La solución del sistema cuando $m=1$.

Para $m=1$, el sistema es S.C.D. con $|A| = 3$. Aplico la Regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1(13) - (-1)(-3) + 1(-1)}{3} = \frac{13 - 3 - 1}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2(-3) - 1(-14) + 1(1)}{3} = \frac{-6 + 14 + 1}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2(1) - (-1)(1) + 1(-9)}{3} = \frac{2 + 1 - 9}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

La solución es $(x, y, z) = (3, 3, -2)$.

c) **Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.**

Este caso ocurre para $m = 0$. El sistema se reduce a dos ecuaciones linealmente independientes:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

Parametrizamos una variable, por ejemplo, $z = \lambda$.

$$\begin{cases} 2x - y = -\lambda \\ x + y = -3\lambda \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: $3x = -4\lambda \implies x = -4\lambda/3$.

Sustituyendo en la segunda: $(-4\lambda/3) + y = -3\lambda \implies y = -3\lambda + 4\lambda/3 = -5\lambda/3$.

La solución es $(x, y, z) = (-4\lambda/3, -5\lambda/3, \lambda), \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Problema 2. Geometría

Se dan las rectas $r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$, $s : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi : x + my + z = 2$ que depende del parámetro real m . Obtend:

- La posición relativa de las rectas r y s .
- El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π .
- Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m=2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P(2,2,2)$.

Solución:

- La posición relativa de las rectas r y s .

Obtenemos un punto y un vector director para cada recta.

Para r : $\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 1, -2)$. Si $x = 0, y = 1, z = -1$. $P_r(0, 1, -1)$.

Para s : $P_s(1, 0, 0), \vec{v}_s(1, -1, 2)$.

Como $\vec{v}_s = -\vec{v}_r$, las rectas son paralelas o coincidentes.

Comprobamos si $P_r(0, 1, -1)$ está en s :

$$\frac{0-1}{1} = \frac{1}{-1} = \frac{-1}{2} \implies -1 = -1 \neq -1/2$$

Como no se cumplen todas las igualdades, el punto no pertenece a s .

Las rectas son paralelas.

- El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π .

Deben cumplirse dos condiciones:

- El vector director de r , \vec{v}_r , debe ser ortogonal al vector normal del plano, $\vec{n}_\pi = (1, m, 1)$.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (-1, 1, -2) \cdot (1, m, 1) = -1 + m - 2 = m - 3 = 0 \implies m = 3$$

- Un punto de r , $P_r(0, 1, -1)$, debe pertenecer al plano π .

$$0 + m(1) + (-1) = 2 \implies m - 1 = 2 \implies m = 3$$

Ambas condiciones se satisfacen para $m = 3$.

$m = 3$.

- Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m=2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P(2,2,2)$.

Para $m = 2$, el plano es $\pi : x + 2y + z = 2$.

A (eje OX, $y=z=0$): $x = 2 \implies A(2, 0, 0)$.

B (eje OY, $x=z=0$): $2y = 2 \implies y = 1 \implies B(0, 1, 0)$.

C (eje OZ, $x=y=0$): $z = 2 \implies C(0, 0, 2)$.



El volumen del tetraedro es $V = \frac{1}{6} |\det(\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC})|$.

$\vec{PA} = (0, -2, -2)$, $\vec{PB} = (-2, -1, -2)$, $\vec{PC} = (-2, -2, 0)$.

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} | -(-2)(0-4) + (-2)(4-2) | = \frac{1}{6} | -8 - 4 | = \frac{12}{6} = 2$$

A(2,0,0), B(0,1,0), C(0,0,2). El volumen del tetraedro es 2 u³.



Problema 3. Análisis

Dada la función $f(x) = xe^{1-x^2}$, calculad:

- El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.
- Las asíntotas y la gráfica de f .
- La integral $\int f(x)dx$.

Solución:

- El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.

Dominio: La función es producto de una polinómica y una exponencial, ambas con dominio \mathbb{R} . Por tanto, $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Monotonía y extremos: Calculamos la primera derivada.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{1-x^2} + x \cdot e^{1-x^2}(-2x) = e^{1-x^2}(1 - 2x^2)$$

$$f'(x) = 0 \implies 1 - 2x^2 = 0 \implies x^2 = 1/2 \implies x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Construimos la tabla de monotonía:

Intervalo	$(-\infty, -1/\sqrt{2})$	$(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$	$(1/\sqrt{2}, \infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	Decreciente \searrow	Creciente \nearrow	Decreciente \searrow

Hay un mínimo relativo en $x = -1/\sqrt{2}$ y un máximo relativo en $x = 1/\sqrt{2}$.

Dom: \mathbb{R} . Crece: $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Decrece: $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$. Mín/Máx en $\mp \frac{\sqrt{2}}{2}$.
--

- Las asíntotas y la gráfica de f .

A. Verticales: No hay, por ser el dominio \mathbb{R} .

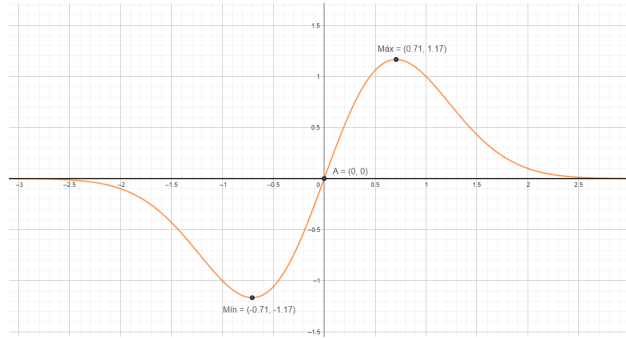
A. Horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{e^{x^2-1}} = 0 \quad (\text{por L'Hôpital})$$

Hay una Asíntota Horizontal en $y = 0$. **Gráfica:** La función es impar ($f(-x) = -f(x)$). Pasa por $(0,0)$. Tiene los extremos calculados y se aproxima a $y = 0$ en $\pm\infty$.

Asíntota Horizontal en $y=0$. No hay más asíntotas.





c) La integral $\int f(x)dx$.

Para $\int xe^{1-x^2} dx$, usamos sustitución: $u = 1 - x^2, du = -2xdx \implies xdx = -du/2$.

$$\int e^u \left(-\frac{du}{2} \right) = -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} e^u + C = -\frac{1}{2} e^{1-x^2} + C$$

$$\boxed{\int f(x)dx = -\frac{1}{2} e^{1-x^2} + C.}$$

Problema 4. Álgebra

Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2 - 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3)$. Obtener:

- El rango de la matriz A según los valores del parámetro a.
- Una matriz C tal que $AC=16I$ siendo I la matriz identidad, cuando $a=0$.
- El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene solución.

Solución:

- El rango de la matriz A según los valores del parámetro a.

$$|A| = 3a - 2(a^2 - 2) - (-3 - 3(a^2 - 2)) = 3a - 2a^2 + 4 + 3 + 3a^2 - 6 = a^2 + 3a + 1$$

$$|A| = 0 \implies a = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Si $a \neq \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\text{Rg}(A) = 3$. Si $a = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\text{Rg}(A) = 2$.

$$\text{Si } a \neq \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{Rg}(A) = 3. \text{ En caso contrario, Rg}(A) = 2.$$

- Una matriz C tal que $AC=16I$ siendo I la matriz identidad, cuando $a=0$.

$$AC = 16I \implies C = 16A^{-1}. \text{ Para } a = 0, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } |A| = 1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -12 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = 16A^{-1} = \begin{pmatrix} 32 & -192 & 32 \\ 64 & 0 & -64 \\ -32 & 64 & 32 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 32 & -192 & 32 \\ 64 & 0 & -64 \\ -32 & 64 & 32 \end{pmatrix}.$$

- El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene solución.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Todas las filas son proporcionales a la primera, $\text{Rg}(B) = 1$.

El sistema es $BX = V$, donde $V = (1, -1, 2)^T$.

$$B^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{array} \right).$$

Todas las filas son proporcionales, $F_2 = -F_1, F_3 = 2F_1$. $\text{Rg}(B^*) = 1$.

Como $\text{Rg}(B) = \text{Rg}(B^*) = 1 < 3$, el sistema es **Compatible Indeterminado**.

$\text{Rg}(B) = 1$. El sistema tiene solución (es S.C.I.)

Problema 5. Geometría

Dados los puntos $P(1, 1, 0)$, $Q(2, -1, 1)$ y $R(\alpha, 3, -1)$, se pide:

- La ecuación del plano que contiene a P, Q y R cuando $\alpha = 1$ y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas.
- La ecuación de la recta r que pasa por R cuando $\alpha = 1$ y es paralela a la recta s que pasa por P y Q. Calculad la distancia entre las rectas r y s.
- Los valores de α para los cuales P, Q y R están alineados y la ecuación de la recta que los contiene.

Solución:

- La ecuación del plano que contiene a P, Q y R cuando $\alpha = 1$ y la distancia de dicho plano al origen.

Para $\alpha = 1$, $R(1, 3, -1)$. $\vec{PQ} = (1, -2, 1)$, $\vec{PR} = (0, 2, -1)$.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies (x-1)(0) - (y-1)(-1) + z(2) = 0 \implies y + 2z - 1 = 0$$

$$d(O, \pi) = \frac{|0 + 2(0) - 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Plano: $y + 2z - 1 = 0$. Distancia: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
--

- La ecuación de la recta r que pasa por R cuando $\alpha = 1$ y es paralela a la recta s que pasa por P y Q. Calculad la distancia entre las rectas r y s.

Recta s pasa por P y Q: $\vec{v}_s = \vec{PQ} = (1, -2, 1)$. Recta r pasa por $R(1, 3, -1)$ y es paralela a s: $\vec{v}_r = \vec{v}_s$.

$$r \equiv (x, y, z) = (1, 3, -1) + \lambda(1, -2, 1)$$

Distancia entre rectas paralelas: $d(r, s) = d(P, r) = \frac{|\vec{RP} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$.

$$\vec{RP} = (0, -2, 1), \vec{v}_r = (1, -2, 1).$$

$$\vec{RP} \times \vec{v}_r = (0, 1, 2). |\vec{RP} \times \vec{v}_r| = \sqrt{5}. |\vec{v}_r| = \sqrt{6}.$$

Recta r: $(x, y, z) = (1, 3, -1) + \lambda(1, -2, 1)$. Distancia: $\sqrt{5/6}$.
--

- Los valores de α para los cuales P, Q y R están alineados y la ecuación de la recta que los contiene.

P, Q, R están alineados si \vec{PQ} y \vec{PR} son proporcionales. $\vec{PQ} = (1, -2, 1)$, $\vec{PR} = (\alpha - 1, 2, -1)$.

$$\frac{\alpha - 1}{1} = \frac{2}{-2} = \frac{-1}{1} \implies \alpha - 1 = -1 \implies \alpha = 0$$

Para $\alpha = 0$, la recta pasa por P y tiene vector \vec{PQ} .

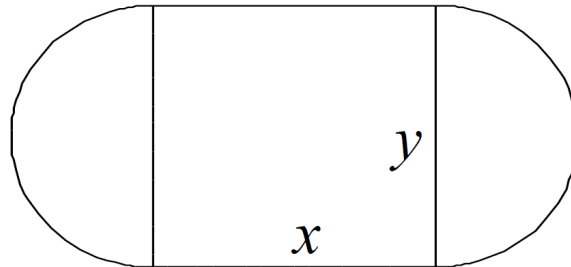
$\alpha = 0$. Recta: $(x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(1, -2, 1)$.
--



Problema 6. Análisis

Queremos diseñar un campo de juego de modo que la parte central sea rectangular, y las partes laterales sean semicircunferencias hacia fuera. La superficie del campo mide $(4 + \pi)$ metros cuadrados. Se quieren pintar todas las rayas de dicho campo tal y como se observa en la figura.

- Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo.
- Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima.



Solución:

Interpretación del problema:

La longitud a pintar incluye los dos lados rectos y las dos semicircunferencias, es decir, el perímetro exterior. La interpretación original que incluía los diámetros interiores ($2x+2y+\pi*y$) lleva a una solución más compleja, por lo que se asume la interpretación de perímetro exterior ($2x+\pi*y$) que es más estándar para este tipo de problemas.

- Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo.

Sea x la longitud del lado recto e y la altura del rectángulo (que es el diámetro de las semicircunferencias). El radio es $r = y/2$.

Área total:

$$A = xy + \pi r^2 = xy + \pi(y/2)^2 = xy + \frac{\pi y^2}{4} = 4 + \pi$$

Despejamos x :

$$x = \frac{4 + \pi}{y} - \frac{\pi y}{4}$$

Longitud de las rayas (perímetro exterior): $L = 2x + 2\pi r = 2x + \pi y$.

Sustituimos x :

$$L(y) = 2 \left(\frac{4 + \pi}{y} - \frac{\pi y}{4} \right) + \pi y = \frac{8 + 2\pi}{y} - \frac{\pi y}{2} + \pi y = \frac{8 + 2\pi}{y} + \frac{\pi y}{2}$$

$$L(y) = \frac{8 + 2\pi}{y} + \frac{\pi y}{2}$$

- Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima.

Derivamos $L(y)$ e igualamos a 0 para encontrar el mínimo.

$$L'(y) = -\frac{8 + 2\pi}{y^2} + \frac{\pi}{2}$$

$$L'(y) = 0 \implies \frac{\pi}{2} = \frac{8+2\pi}{y^2} \implies \pi y^2 = 16 + 4\pi \implies y^2 = \frac{16+4\pi}{\pi}.$$

$$y = \sqrt{\frac{16+4\pi}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{4+\pi}{\pi}}$$

Estudiamos la monotonía para $y > 0$:

Intervalo	$(0, 2\sqrt{\frac{4+\pi}{\pi}})$	$(2\sqrt{\frac{4+\pi}{\pi}}, \infty)$
Signo $L'(y)$	-	+
$L(y)$	Decreciente ↘	Creciente ↗

Hay un mínimo en $y = 2\sqrt{\frac{4+\pi}{\pi}}$. Si $y^2 = \frac{16+4\pi}{\pi}$, entonces $\frac{\pi y^2}{4} = 4 + \pi$.

De la fórmula del área, $xy + \frac{\pi y^2}{4} = 4 + \pi \implies xy + 4 + \pi = 4 + \pi \implies xy = 0$. Como $y \neq 0$, entonces $x = 0$.

Esto significa que para minimizar el perímetro para un área dada, la forma óptima es un círculo (el rectángulo central desaparece).

Las dimensiones son $x = 0$ m y $y = 2\sqrt{1 + 4/\pi}$ m (un círculo perfecto).